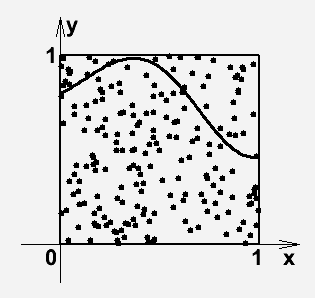
**Задача 9**

**Интегрирование методом Монте-Карло.**

**Описание:**

**Методы Монте-Карло (ММК)** – это численные методы решения математических задач с помощью моделирования случайных величин. ММК позволяют успешно решать задачи, обусловленные вероятностными процессами, а при решении задач, не связанных с какими-либо вероятностями, можно искусственно придумать вероятностную модель, позволяющую решать эти задачи. В качестве примера рассмотрим вычисление однократного определенного интеграла , при условии, что значения функции  в интервале  так же расположены между нулем и единицей.

Вспомним, что значение определенного интеграла равно площади фигуры под графиком . Если теперь равномерно заполнить единичный квадрат очень большим количеством случайных точек и посчитать, сколько таких точек попадет под кривую , то отношение количества точек, попавших под кривую,  к общему количеству точек  будет приблизительно равно отношению площади искомой фигуры к площади единичного квадрата . Отсюда получаем, что значение интеграла будет:

.

Для определения точности, с которой был вычислен интеграл  методом Монте-Карло, т.е. величины  следует учесть, что оценка является случайной величиной. Поэтому для некоторой малой величинымы можем оценить только вероятность события, заключающегося в том, что наша оценка окажется слишком грубой , ограничив эту вероятность другой малой величиной : . В нашем случае событие (успех), состоящее в попадании точки под кривую, происходит с вероятностью. Опишем одно из таких событий вспомогательной случайной величиной, которая с вероятностью равна 1, и нулю в противном случае. Нетрудно подсчитать математическое ожидание и дисперсию:

,

.

Очевидно, что число таких событий (число успехов в серии из  испытаний) будет иметь биномиальное распределение (см. **Задачу 1.**) со средними дисперсией. Отсюда мы можем найти математическое ожидание и дисперсию интересующей нас оценки интеграла:(что говорит о несмещенности оценки);, а также и среднеквадратичную величину . Выберем теперь для оценки очень малой вероятности величину. Тогда вероятность того, что отклонение интеграла от его оценки не превысит,будет равна.

Далее мы учтем, что в соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей (см. **Задачу 5.**) при больших величина как сумма большого числа слагаемых имеет приблизительно нормальное распределение, так что после ее нормировки получаем:

,

где введено обозначение

.

Таким образом, погрешность интегрирования выражается как

.

Значение  определяется по заданному . Например, при  мы должны выбрать.

Точность при небольших размерностях области интегрирования заметно уступает точности обычных детерминированных методов интегрирования. Однако начиная с размерностей 3 – 4 и выше, монте-карловское интегрирование оказывается более точным, особенно в случаях, когда подынтегральная функция задается неявно, а область интегрирования представляется в виде сложных неравенств.

**Порядок выполнения:**

Рассмотрим пример оценки значения числа , входящего в формулу объема шара единичного радиуса. За область интегрирования можно взять восьмую часть этого шара:

Получаем:

, где область интегрирования определяется как:

 (1)

а) В программе Excel в колонках A и B и C сгенерировать по N случайных чисел (x-, y-, и z-координат точек, соответственно) с равномерным распределением на интервале от 0 до 1 (см. **Задачу 3.**). Затем колонку D заполнить по формуле . После этого значения в колонке E рассчитываются как

. (2)

Объем шара определяется по формуле . Отсюда.

Погрешность этого значения .

На языке JavaScript интегрирование функциипо области , оценку числа и расчет погрешности найденного значения можно произвести по аналогии со следующим кодом (код неполон, нет учета условий (1-2), их вставка – самостоятельная работа):

На экран нужно вывести значение полученного объема, значение оценки для числа , а также оценку погрешности вычисления.